

UE M1 : Modélisation des Systèmes Environnementaux

Epidémie de zombiesNote

Avant 15h30, vous devez nous envoyer par mail à marie.camredon@lisa.u-pec.fr et guillaume.siour@lisa.u-pec.fr :

- votre document texte (type Word) avec les réponses aux questions
- votre tableur (type Excel) ou votre programme R contenant vos résultats de simulations et graphiques

Attendez de recevoir notre accusé de réception pour partir

Contexte

L'objectif est d'étudier un modèle épidémiologique, c'est-à-dire la propagation d'une épidémie. On considère que la population globale est constituée de trois espèces : des humains, des zombies, des décédés (total d'humains et de zombies décédés).

Pour décrire le système humains/zombies/décédés, on fait les hypothèses suivantes :

- un humain peut décéder de cause naturelle ;
- un humain devient zombie s'il se fait mordre par un zombie ;
- un zombie peut décéder s'il se fait tirer dessus au cerveau par un humain ;
- un décédé reste décédé.

On note H , Z et D respectivement le nombre d'humains, de zombies et de décédés. Pour développer notre modèle on s'inspire du modèle proie-prédateur Lotka-Volterra :

- plus il y a d'humains, plus il est probable d'avoir des décédés ;
- plus il y a d'humains, plus il est probable pour un zombie de contaminer un humain. De même, plus il y a de zombies, plus il est probable pour un humain de se faire contaminer ;
- plus il y a de zombies, plus il est probable pour un humain de l'éliminer en atteignant son cerveau. De même plus il y a d'humains, plus un zombie risque de se faire éliminer.
- la population décédée provient de la mortalité naturelle des humains et des zombies éliminés ;

On notera α le taux de zombies éliminés par les humains, β le taux d'humains transformés en zombies, et δ le taux de mortalité naturelle des humains.

Notre situation d'épidémie de zombie se modélise par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\beta H Z - \delta H \\ \frac{dZ}{dt} &= \beta H Z - \alpha H Z \\ \frac{dD}{dt} &= \delta H + \alpha H Z\end{aligned}$$

On étudie l'évolution de ces trois espèces en fonction du temps, t , lors d'un épisode d'épidémie de zombies. Les conditions initiales utilisées dans notre cas seront $H_0=10000$, $Z_0=10$ et $D_0=0$. On prendra $\alpha = 10^{-6}$, $\beta = 10^{-5}$ et $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$.



Questions

1. Résolution du système à l'aide de la méthode d'Euler explicite.
 - a. Expliquez le principe de la méthode de résolution numérique d'Euler explicite.
 - b. Utilisez la méthode d'Euler explicite pour résoudre ce système.
 - c. Tracez sur un même graphique les évolutions des trois espèces en fonction du temps. Discutez de l'influence du pas de temps sur la solution numérique. Quel pas de temps vous semble le mieux adapté ?
 - d. Une fois le pas de temps optimisé, discutez de l'évolution des espèces.
2. Résolution du système à l'aide d'une autre méthode de résolution numérique.
 - e. Quelle autre méthode de résolution numérique connaissez-vous ? Expliquez son principe.
 - f. Utilisez cette méthode pour résoudre ce système. Tracez l'évolution des trois espèces en fonction du temps pour les deux méthodes de résolution numérique. Comparez ces deux solutions et discutez.
3. Ajout d'autres processus dans le modèle.
 - g. **De nombreux processus n'ont pas été pris en compte dans ce modèle** (exemples : prise en compte des naissances des humains, de la transformation d'une fraction des récemment décédés en zombies, d'un vaccin qui immuniserait une fraction des humains contre la morsure d'un zombie...). **Choisissez un processus à intégrer au modèle, décrivez clairement ce processus, expliquez comment vous choisissez de le représenter mathématiquement dans votre modèle, intégrez le dans la méthode de résolution numérique de votre choix, résolvez le nouveau système et discutez des évolutions temporelles des espèces.**